ГЕОМЕТРИЯ • 7 КЛАСС

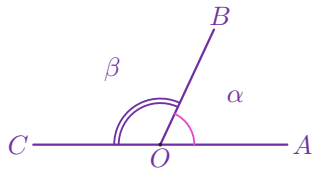
СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Учимся читать рисунок

При пересечении двух прямых появляются четыре угла. Одни пары лежат рядом, другие — напротив. Но название пары определяем по её **сторонам**, а не только по виду рисунка.

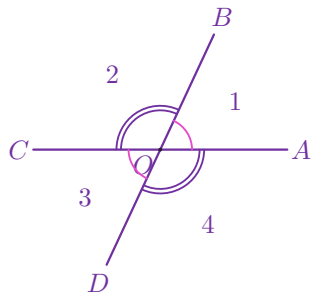


Смежные углы



У двух смежных углов **одна сторона общая**.
Здесь общая сторона — OB; лучи OA и OC образуют прямую.
$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$.
Вместе эти углы составляют развёрнутый угол.

Вертикальные углы



Стороны одного вертикального угла являются **продолжениями сторон другого**.
На рисунке две вертикальные пары:
$\angle 1 = \angle 3, \qquad \angle 2 = \angle 4.$
Углы одной пары отмечаем одинаковым числом дуг.

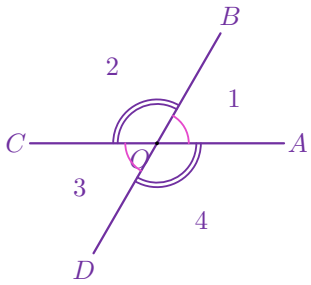
Все четыре смежные пары:

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \qquad \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ,$
$\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ, \qquad \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ.$

Первые шаги

Задача 1. Назвать и построить

Прямые AC и BD пересекаются в O. Назови вертикальную пару и две смежные пары. Как построить угол, вертикальный AOB?

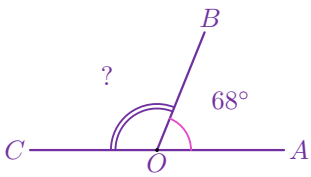


1) $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные: OA, OC и OB, OD — противоположные лучи.
2) $\angle AOB$ смежен с $\angle BOC$ и с $\angle DOA$: в каждой паре есть общая сторона.
3) Для построения продлеваем AO за O до C, а BO — за O до D.

Ответ: вертикальный к $\angle AOB$ — $\angle COD$.

Задача 2. Известен один смежный угол

Лучи OA и OC противоположны. $\angle AOB = 68°$. Найди $\angle BOC$.

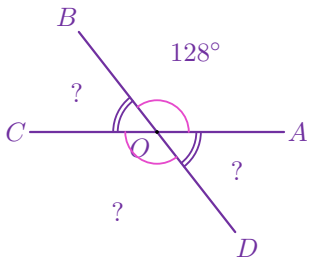


1) У углов общая сторона OB, остальные стороны противоположны. Значит, углы смежные.
2) Вычитаем известный угол из $180°$:
$\angle BOC = 180° - 68° = 112°$.

Ответ: $112°$.

Задача 3. Найти все углы и угол между прямыми

Прямые AC и BD пересекаются в O, $\angle AOB = 128°$. Найди остальные три угла и угол между прямыми.



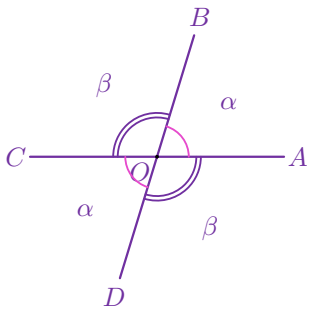
1) $\angle COD = 128°$. Вертикальные углы равны.
2) $\angle BOC = 180° - 128° = 52°$. Угол DOA вертикален ему и тоже равен $52°$.
3) Меньший из углов — $52°$.

Ответ: $\angle BOC = \angle DOA = 52°$, $\angle COD = 128°$; между прямыми — $52°$.

Находим угол по нескольким данным

Задача 4. Дана сумма вертикальных углов

Сумма $\angle AOB$ и $\angle COD$ равна $146°$. Прямые AC и BD пересекаются в O. Найди все углы.

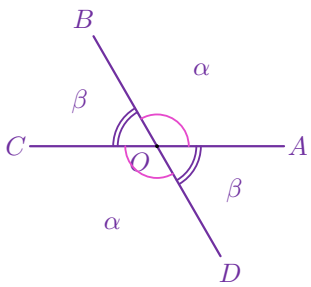


1) Вертикальные углы равны. Обозначим каждый из них через α:
$2\alpha = 146°, \qquad \alpha = 73°.$
2) Каждый смежный угол:
$\beta = 180° - 73° = 107°.$

Ответ: два угла по $73°$ и два по $107°$.

Задача 5. Дана сумма трёх углов

При пересечении прямых AC и BD сумма $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 300°$. Найди четыре угла.

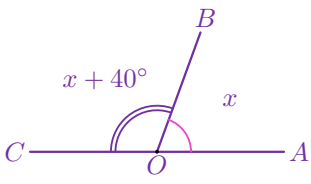


1) Четыре угла в сумме дают $360°$:
$\angle DOA = 360° - 300° = 60°.$
2) $\angle BOC = 60°$. Он вертикален DOA.
3) Два остальных угла равны $180° - 60° = 120°$.

Ответ: $120°,\ 60°,\ 120°,\ 60°$.

Задача 6. Один смежный угол больше на заданное число

Угол BOC на $40°$ больше смежного с ним угла AOB. Найди оба угла.



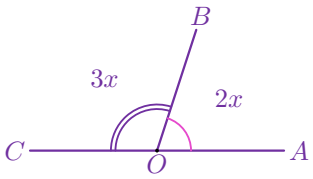
1) Пусть меньший угол равен $x°$; тогда больший — $(x + 40)°$.
2) Сумма смежных углов — $180°$:
$x + (x + 40) = 180, \quad 2x = 140, \quad x = 70.$
3) Больший угол: $70° + 40° = 110°$.

Ответ: $70°$ и $110°$.

Углы и уравнения

Задача 7. Дано отношение смежных углов

Смежные углы AOB и BOC относятся как $2:3$. Найди их.



1) Одна доля — $x°$; углы равны $2x°$ и $3x°$.

2) $2x + 3x = 180$, поэтому $x = 36$.

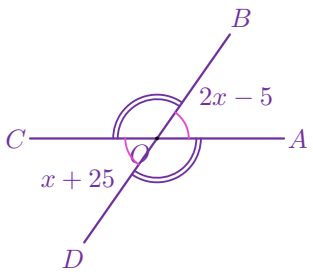
3) Углы: $2 \cdot 36° = 72°$ и $3 \cdot 36° = 108°$.

«В несколько раз», дробь или процент от другого угла тоже можно перевести в отношение.

Ответ: $72°$ **и** $108°$**.**

Задача 8. Выражения у вертикальных углов

AC и BD — пересекающиеся прямые. $\angle AOB = (2x - 5)°$, $\angle COD = (x + 25)°$. Найди x и все углы.



1) Вертикальные углы равны:
$2x - 5 = x + 25, \qquad x = 30.$

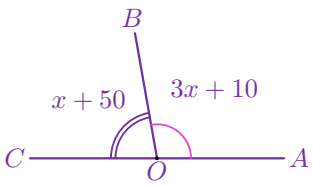
2) Подставляем: $2 \cdot 30 - 5 = 55$.

3) Смежные углы: $180° - 55° = 125°$.

Ответ: $x = 30$**; два угла по** $55°$**, два по** $125°$**.**

Задача 9. Выражения у смежных углов

$\angle AOB = (3x + 10)°$, $\angle BOC = (x + 50)°$; углы смежные. Найди x и величины углов.



1) Складываем выражения:
$(3x + 10) + (x + 50) = 180.$

2) $4x + 60 = 180$, откуда $x = 30$.

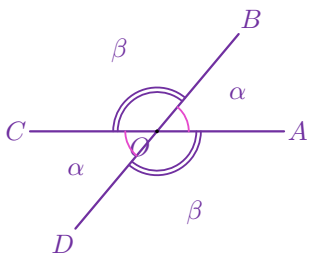
3) $\angle AOB = 100°$, $\angle BOC = 80°$. Проверка: $100° + 80° = 180°$.

Ответ: $x = 30$**;** $100°$ **и** $80°$**.**

Выбираем связь по условию

Задача 10. Сумма одной пары связана с соседним углом

При пересечении двух прямых сумма двух вертикальных углов на $30°$ меньше смежного с каждым из них угла. Найди четыре угла.

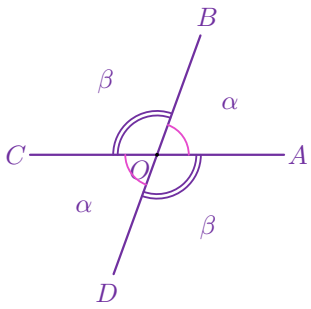


1) Два вертикальных угла равны α, поэтому их сумма — 2α. Смежный с ними угол обозначим через β.
2) «Сумма на $30°$ меньше угла β» означает:
$2\alpha = \beta - 30°$.
Прибавляем $30°$ к обеим частям:
$\beta = 2\alpha + 30°$.
3) Углы α и β смежные. Подставляем выражение для β:
$\alpha + (2\alpha + 30°) = 180°$,
$3\alpha = 180° - 30° = 150°$,
$\alpha = 150° : 3 = 50°$.
4) $\beta = 180° - 50° = 130°$. Проверка: $50° + 50° = 100°$, а $130° - 100° = 30°$.

Ответ: два угла по $50°$, два по $130°$.

Задача 11. Пара углов в условии не названа

Из четырёх углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, выбраны два разных. Их сумма — $140°$. Найди все четыре угла.

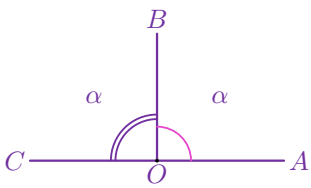


1) Два разных угла из этой четвёрки либо смежные, либо вертикальные.
2) Смежными они быть не могут: их сумма была бы $180°$. Значит, они вертикальные.
3) Каждый равен $140° : 2 = 70°$. Остальные — $110°$.

Ответ: два угла по $70°$, два по $110°$.

Задача 12. Доказать перпендикулярность

Смежные углы AOB и BOC равны. Докажи, что $OB \perp AC$.



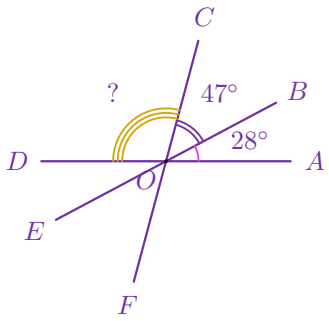
1) Обозначим каждый угол через α. По свойству смежных углов $2\alpha = 180°$.
2) Значит, $\alpha = 90°$.
3) Прямые, образующие прямой угол, перпендикулярны. Следовательно, $OB \perp AC$.

Ответ: утверждение доказано.

На рисунке больше двух прямых

Задача 13. Три прямые: известны два угла

Прямые AD, BE, CF пересекаются в O. Вдоль одной стороны прямой AD лучи идут в порядке OA, OB, OC, OD. $\angle AOB = 28°$, $\angle BOC = 47°$. Найди остальные четыре угла между соседними лучами.



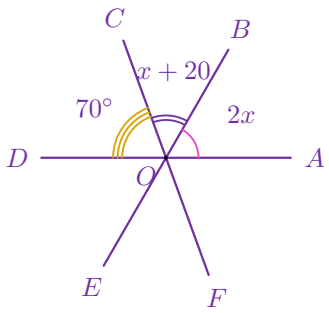
1) Три угла составляют развёрнутый: $\angle COD = 180° - 28° - 47° = 105°$.

2) Используем вертикальные пары: $\angle DOE = 28°$, $\angle EOF = 47°$, $\angle FOA = 105°$.

Ответ: $105°,\ 28°,\ 47°,\ 105°$.

Задача 14. Три прямые и неизвестное x

Прямые и порядок лучей — как в задаче 13. $\angle AOB = 2x°$, $\angle BOC = (x+20)°$, $\angle COD = 70°$. Найди x и шесть углов.



1) Складываем три части развёрнутого угла: $2x + (x + 20) + 70 = 180$.

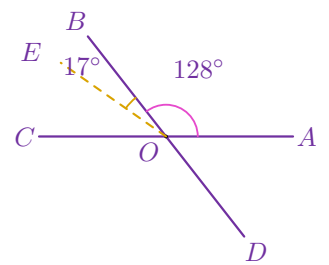
2) $3x = 90$, $x = 30$. Первые три угла — $60°, 50°, 70°$.

3) Три противоположных угла имеют те же величины. Вертикальные углы равны.

Ответ: $x = 30$; **по кругу:** $60°, 50°, 70°, 60°, 50°, 70°$.

Задача 15. Дополнительный луч внутри угла

Прямые AC и BD пересекаются в O, $\angle AOB = 128°$. Луч OE проходит внутри $\angle BOC$, $\angle BOE = 17°$. Найди $\angle EOC$ и $\angle EOD$.



1) $\angle BOC = 180° - 128° = 52°$.

2) Луч OE делит этот угол: $\angle EOC = 52° - 17° = 35°$.

3) $\angle BOE$ и $\angle EOD$ смежные: $\angle EOD = 180° - 17° = 163°$.

Ответ: $35°$ и $163°$.

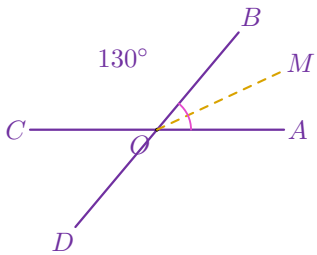
Добавляем биссектрису

Биссектриса угла

Это луч, который выходит из вершины, проходит внутри угла и делит его на два равных угла. Если OM — биссектриса $\angle AOB$, то $\angle AOM = \angle MOB = \dfrac{\angle AOB}{2}$.

Задача 16. От смежного угла — к половине

Прямые AC и BD пересекаются в O. OM — биссектриса $\angle AOB$, $\angle BOC = 130°$. Найди $\angle AOM$ и $\angle MOC$.

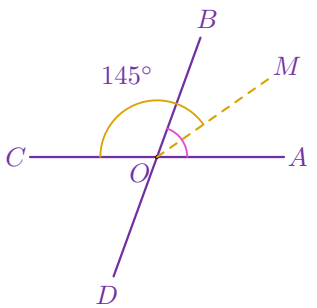


1) $\angle AOB = 180° - 130° = 50°$.
2) $\angle AOM = 50° : 2 = 25°$. По определению биссектрисы.
3) $\angle AOM$ и $\angle MOC$ смежные:
$\angle MOC = 180° - 25° = 155°$.

Ответ: $25°$ и $155°$.

Задача 17. От половины — к целому углу

Условия о прямых и биссектрисе — как в задаче 16. Известно $\angle MOC = 145°$. Найди $\angle AOB$ и $\angle BOC$.



1) $\angle AOM = 180° - 145° = 35°$. Это смежные углы.
2) $\angle AOB = 2 \cdot 35° = 70°$. Биссектриса делит угол пополам.
3) $\angle BOC = 180° - 70° = 110°$.

Ответ: $70°$ и $110°$.

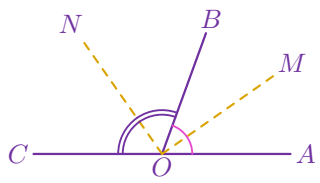
Проверка

Равенства $\angle AOM = \angle MOB$ недостаточно без положения луча: биссектриса должна проходить **внутри** рассматриваемого угла.

Две биссектрисы

Задача 18. Биссектрисы смежных углов

Углы AOB и BOC смежные. Лучи OM и ON — их биссектрисы. Докажи, что $OM \perp ON$.

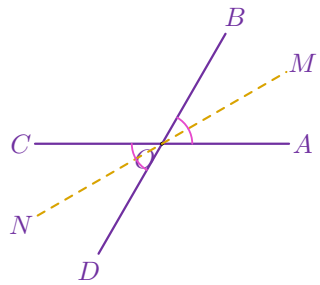


1) Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 180°$.
2) Между OM и ON находятся половины этих углов:
$$\angle MON = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$
3) Поэтому $OM \perp ON$. Лучи образуют прямой угол.

Ответ: биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Задача 19. Биссектрисы вертикальных углов

Прямые AC и BD пересекаются в O. OM — биссектриса $\angle AOB$, ON — биссектриса $\angle COD$. Докажи, что OM и ON — противоположные лучи.



1) Вертикальные углы равны: обозначим их через α. Смежный с ними $\angle BOC = 180° - \alpha$.
2) $\angle MOB = \angle CON = \alpha/2$. По определению биссектрис.
3) Складываем части угла MON вдоль лучей OM, OB, OC, ON:
$$\angle MON = \frac{\alpha}{2} + (180° - \alpha) + \frac{\alpha}{2} = 180°.$$

Ответ: лучи OM и ON противоположны; точки M, O, N лежат на одной прямой.

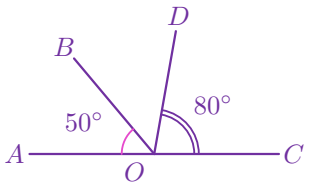
Сравни результаты

У **смежных** углов биссектрисы образуют $90°$, у **вертикальных** — $180°$. Прежде чем вспоминать результат, проверь, о какой паре идёт речь.

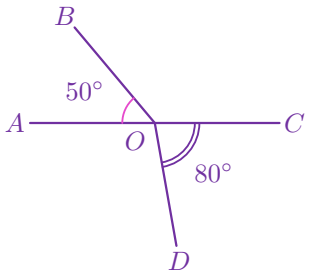
Когда одного числа недостаточно

Задача 20. Два возможных чертежа

Лучи OA и OC противоположны. Известно $\angle AOB = 50°$, $\angle COD = 80°$. Найди меньший угол BOD, если лучи OB и OD: а) по одну сторону от прямой AC; б) по разные стороны.



а) Одна полуплоскость



б) Разные полуплоскости

а) $\angle BOC = 180° - 50° = 130°$. Здесь луч OD внутри BOC, поэтому $\angle BOD = 130° - 80° = 50°$.

б) $\angle AOD = 180° - 80° = 100°$. Теперь OA проходит внутри меньшего угла BOD, поэтому $\angle BOD = 50° + 100° = 150°$.

Ответ: а) $50°$**; б)** $150°$**.**

Вывод: без указания расположения лучей условие не даёт единственного ответа.

Ошибки, которые меняют решение

1) **«Рядом» ещё не значит «смежные».** Нужны общая сторона и противоположные остальные стороны.
2) **«Равны» ещё не значит «вертикальные».** Равные углы могут находиться в разных местах.
3) **Сумма** $180°$ **сама по себе не доказывает смежность.** Проверяем стороны, а не только числа.
4) **Не складывай любые соседние подписи до** $180°$**.** Сначала найди развёрнутый угол, который они составляют.

